ВЕСОВЫЕ ГЕЛЬДЕРОВЫЕ ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРОМ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

С.К.АБДУЛЛАЕВ, А.А.АКПЕРОВ
Бакинский Государственный Университет

Систематические исследования по многомерным сингулярным интегралам, порожденными оператором обобщенного сдвига, берет начало с работ Н.А.Кипрянова и М.И.Ключанцева, где, в частности, для них доказаны теоремы типа теорем Привалова. В данной работе эти интегралы изучаются в весовых пространствах Гельдера- $H^{\gamma}_{\alpha\beta}$. *Найдены достаточные условия на* α, β *и* γ, *обеспечивающие их инвариантность. Отметим, что в работе рассматривается случай, когда оператор обобщенного сдвига берется по двум переменным.*

Пусть R_n -евклидово пространство размерности $n \ge 1$,

$$R^+_{m+1,\,2} = \{(x_1,...,x_m, x_{m+1}) \in R_{m+1} : x_m > 0,\ x_{m+1} > 0\},\ \ S^+_{m+1,\,2} = \{x \in R^+_{m+1,\,2} : |x| = 1\},$$

$$T^s u(x) = c_\nu \int_0^\pi\!\!\int_0^\pi u\Big(x' - s',\ \sqrt{x_m^2 - 2x_m s_m \cdot \cos\alpha_1 + s_m^2},$$

$$\sqrt{x_{m+1}^2 - 2x_{m+1} \cdot s_{m+1} \cdot \cos\alpha_2 + s_{m+1}^2}\Big) \sin^{2\nu_1 - 1}\alpha_1 \cdot \sin^{2\nu_2 - 1}\alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1)$$

оператор обобщенного сдвига (ООС), порожденный оператором Лапласа-Бесселя ([6, 1, 2]),
где $x = (x', x_m, x_{m+1})$, $s = (s', s_m, s_{m+1})$, $x', s' \in R_{m-1}$, $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$, c_ν -постоянное.

Рассматривается сингулярный интеграл

$$Au(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\{s \in R^+_{m+1,2} : |s| > \varepsilon\}} \frac{f(\theta)}{|s|^{m+1+2\nu}} [T^s u(x)] \cdot s_m^{2\nu_1} \cdot s_{m+1}^{2\nu_2} ds, \quad (2)$$

порожденный ООС, где $\theta = \frac{s}{|s|}$, $\varepsilon > 0$, $\nu = \nu_1 + \nu_2$.

Легко устанавливается ([5]), что если a и b произвольные числа такие, что $0 < a < b \le \infty$, то для каждой точки $x \in R^+_{m+1,2}$ имеет место равенство

$$\int_{\{s \in R^+_{m+1,2} : a < |s| < b\}} f\left(\frac{s}{|s|}\right) \cdot |s|^{-m-1-2\nu} [T^s u(x)] \cdot s_m^{2\nu_1} \cdot s_{m+1}^{2\nu_2} ds =$$

$$= \int\limits_{\{y\in R_{m+3}:\, a<|\tilde{x}-y|<b\}} f(\tilde{\theta})\cdot|\tilde{x}-y|^{-m-1-2\nu} u\left(y', \sqrt{y_m^2+\tilde{y}_m^2}, \sqrt{y_{m+1}^2+\tilde{y}_{m+1}^2}\right)\times$$

$$\times|\tilde{y}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2-1}\,dy, \tag{3}$$

где

$$\tilde{x}=(x', x_m, x_{m+1}, 0, 0),\; y=(y', y_m, y_{m+1}, \tilde{y}_m, \tilde{y}_{m+1}),\quad dy=dy_1\times\ldots\times d\tilde{y}_{m+1},$$

$$r_{\tilde{x},y}=|\tilde{x}-y|,\quad \tilde{\theta}=\left(\frac{x'-y'}{r_{\tilde{x},y}}, \frac{\sqrt{(x_m-y_m)^2+\tilde{y}_m^2}}{r_{\tilde{x},y}}, \frac{\sqrt{(x_{m+1}-y_{m+1})^2+\tilde{y}_{m+1}^2}}{r_{\tilde{x},y}}\right).$$

В (3) полагая $u(x)\equiv 1$ и переходя к полярным координатам получаем:

$$\int\limits_{S^+_{m+1,2}} f(\theta)\theta_m^{2\nu_1}\cdot\theta_{m+1}^{2\nu_2}\,ds(\theta)=C_\nu\cdot C\int\limits_{S_{m+3}} f(\tilde{\theta})|\tilde{\theta}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\tilde{\theta}_{m+1}|^{2\nu_2-1}\,ds(\theta), \tag{4}$$

где $S_{m+3}=\{y\in R_{m+3}:|y|=1\}$.

В дальнейшем $a(x)\prec b(x)$ означает, что $a(x)\le c\,b(x)$, где c-постоянное. В случае $a(x)\prec b(x)$ и $b(x)\prec a(x)$ запишем $a(x)\approx b(x)$.

Следуя ([4]) вводятся пространства Гельдера с весом $H^\gamma_{\alpha\beta}(R^+_{m+1,2})$.

Пусть $\gamma>0$, $\alpha>0$, β-действительное число,

$$\rho(x)=(\min\{x_m, x_{m+1}\})^\alpha\cdot(1+|x|)^{\beta-\alpha},$$

$$\Gamma=\{x=(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1}):\; x_m=0 \quad\text{или}\quad x_{m+1}=0\}.$$

По определению ([3]) $u\in H^\gamma_{\alpha\beta}(R^+_{m+1,2})$, если $\lim\limits_{x\to z\in\Gamma} u(x)\rho(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)\rho(x)=0$ и конечна норма

$$\|u\|_{H^\gamma_{\alpha\beta}}=\sup_{x,y\in R^+_{m+1,2}}\left(|u(x)\rho(x)-u(y)\rho(y)|\cdot d^{-\gamma}(x,y)\right),$$

где

$$d(x,y)=|x-y|\cdot((1+|x|)\cdot(1+|y|))^{-1}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$0<\gamma<1,\;\; 0<\alpha-\gamma<1,\;\; 0<\beta+\gamma<m+1. \tag{5}$$

Пусть $x\in R^+_{m+1,2}$. Обозначим

$$ш_x=\left\{s\in R^+_{m+1,2}: |s-x|<\frac{\min\{x_m, x_{m+1}\}}{2}\right\},$$

$$ш'_x=\left\{y\in R_{m+3}: |\tilde{x}-y|<\frac{\min\{x_m, x_{m+1}\}}{2}\right\},\quad l=2\gamma+\beta-\alpha.$$

Для дальнейших рассуждений нужна

Лемма Н. Если верны неравенства (5), то $u\in H^\gamma_{\alpha\beta}(R^+_{m+1,2})$ тогда и только тогда, когда а) $\exists c_1(u),\ \forall x \in R^+_{m+1,2},\quad |u(x)| \le c_1(u)(\min\{x_m,\ x_{m+1}\})^{\gamma-\alpha}\cdot(1+|x|)^{-l}$;

б) $\exists c_2(u),\ \forall x \in R^+_{m+1,2},\ \forall y \in ш_x,\ |u(x)-u(y)| \le c_2(u)\rho^{-1}(x)d^{\gamma}(x,y)$.

При этом $\|u\| = (\min c_1(u) + \min c_2(u))$.

Следствие Н. Если $u \in H^{\gamma}_{\alpha\beta}(R^+_{m+1,2})$, то

а) $\left|u\left(y',\ \sqrt{y_m^2+\widetilde{y}_m^2},\ \sqrt{y_{m+1}^2+\widetilde{y}_{m+1}^2}\right)\right| \prec \|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot(\min\{|y_m|+|\widetilde{y}_m|,\ |y_{m+1}|+|\widetilde{y}_{m+1}|\})^{\gamma-\alpha}\times$

$\times(1+|y'|+|y_m|+|y_{m+1}|+|\widetilde{y}_m|+|\widetilde{y}_{m+1}|)^{-l}$;

б) $\forall x \in R^+_{m+1,2},\ \forall y \in ш'_x\quad \left|u\left(y',\ \sqrt{y_m^2+\widetilde{y}_m^2},\ \sqrt{y_{m+1}^2+\widetilde{y}_{m+1}^2}\right)-u(x)\right| \prec$

$\prec \|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot\rho^{-1}(x)\cdot d^{\gamma}(\widetilde{x},y)$.

О существование сингулярного интеграла (2) справедлива

Теорема. Пусть $u \in H^{\gamma}_{\alpha\beta}(R^+_{m+1,2})$ и выполняется (5).

Если $f(\theta),\quad \theta \in S^+_{m+1,2}$, ограничена, и

$$\int_{S^+_{m+1,2}} f(\theta)\theta_m^{2\nu_1}\cdot\theta_{m+1}^{2\nu_2}\,ds(\theta) = 0, \tag{*}$$

то в каждой точке $x \in R^+_{m+1,2}$ существует сингулярный интеграл (2).

В работе рассматривается задача об ограниченности сингулярного интегрального оператора $A: u \to Au(x)$ в пространствах $H^{\gamma}_{\alpha\beta}(R^+_{m+1,2})$.

Теорема А. Пусть f удовлетворяет условию (*) и $|f(\theta_1)-f(\theta_2)| \le C_f\cdot|\theta_1-\theta_2|^{\delta}$, где C_f постоянное, $\theta_1,\theta_2 \in S^+_{m+1,2}$, $0<\delta\le 1$. Если $0<\gamma<\delta\le 1$, $0<\alpha-\gamma<1$, $\beta+\gamma<m+1$, то сингулярный интегральный оператор

$$A: u \to Au(x) \equiv v.p.\int_{S^+_{m+1,2}} f(\theta)\cdot|s|^{-m-1-2\nu}\left[T^s u(x)\right]\cdot s_m^{2\nu_1}\cdot s_{m+1}^{2\nu_2}\,ds$$

ограничен в $H^{\gamma}_{\alpha\beta}(R^+_{m+1,2})$.

Доказательство. В силу леммы Н для доказательства теоремы достаточно показать, что $\exists c_1, c_2$ такие, что

1) $\forall x \in R^+_{m+1,2}\quad |Au(x)| \le c_1\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}(\min\{x_m,\ x_{m+1}\})^{\gamma-\alpha}\cdot(1+|x|)^{-l}$;

2) $\forall x \in R^+_{m+2}$ и $|h| \le \dfrac{\min\{x_m,\ x_{m+1}\}}{8}$

$$|Au(x)+Au(x\tilde{\mp}h)| \le c_2\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot\rho^{-1}(x)\cdot(1+|x|)^{-2\gamma}\cdot|h|^{\gamma}. \tag{6}$$

Докажем 1). Пусть $x \in R^+_{m+1,2}$, тогда

$$|Au(x)| \le c\,(|\tau_1(x,\ ш'_x)| + |\tau_2(x,\ R_{m+3}\setminus ш'_x)|),$$

где полагаем $\left(B \subset ш'_x\right)$

$$\tau_1(x;B)=\int\limits_B \frac{f(\widetilde{\theta})}{r_{\widetilde{x},y}^{m+1+2\nu}}\left(u\left(y',\sqrt{y_m^2+\widetilde{y}_m^2},\ \sqrt{y_{m+1}^2+\widetilde{y}_{m+1}^2}\right)-u(x)\right)\times$$

$$\times\left|\widetilde{y}_m\right|^{2\nu_1-1}\cdot\left|\widetilde{y}_{m+1}\right|^{2\nu_2-1}dy\ ;$$

$$\tau_2(x,B)=\int\limits_{\left(R_{m+3}\setminus ш'_x\right)\cap B}\frac{f(\widetilde{\theta})}{r_{\widetilde{x},y}^{m+1+2\nu}}u\left(y',\sqrt{y_m^2+\widetilde{y}_m^2},\ \sqrt{y_{m+1}^2+\widetilde{y}_{m+1}^2}\right)\cdot\left|\widetilde{y}_m\right|^{2\nu_1-1}\cdot\left|\widetilde{y}_{m+1}\right|^{2\nu_2-1}dy\,.$$

Учитывая пункт б) следствия Н непосредственными вычислениями получаем

$$\left|\tau_1(x;B)\right|\prec\|f\|\cdot\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot\rho^{-1}(x)\cdot\left(1+|x|\right)^{-2\gamma}\int\limits_B\left|\widetilde{y}_m\right|^{2\nu_1-1}\cdot\left|\widetilde{y}_{m+1}\right|^{2\nu_2}r_{\widetilde{x},y}^{-(m+1+2\nu-\gamma)}dy\,,$$

откуда следует, что

$$\left|\tau_1(x;B)\right|\prec\|f\|\cdot\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot\left(\min\{x_m,x_{m+1}\}\right)^{\gamma-\alpha}\cdot\left(1+|x|\right)^{-l}\,. \tag{7}$$

А теперь оценим сверху $\tau_2(x,B)$.

Прежде всего, отметим, что при $y\in R_{m+3}\setminus ш'_x$ $\quad|\widetilde{x}-y|\geq\min\{x_m,x_{m+1}\}$.

Введем множества $A_x=\left\{y\in R_{m+3}:|\widetilde{x}-y|\leq\frac{|y|}{2}\right\}$,

$$B_x=\left\{y\in R_{m+3}:\frac{|y|}{2}\leq|\widetilde{x}-y|\leq\frac{3|y|}{2}\right\},\quad C_x=\left\{y\in R_{m+3}:3|y|\leq|\widetilde{x}-y|\right\}\,.$$

Простыми оценками получаем:

$$\left|\tau_2(x,B)\right|\prec\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot\|f\|\left(\tau_2(x;A_x)+\tau_2(x;B_x)+\tau_2(x;C_x)\right). \tag{8}$$

Теперь оценим сверху интегралы, стоящие в правой части (8).

Отметим, что если $y\in A_x$, то $(1+|x|)\asymp(1+|y|)$ и

$$|\widetilde{x}-y|\asymp|x'-y'|+\min\{x_m,\ x_{m+1}\}+|x_m-y_m|+|x_{m+1}-y_{m+1}|+|\widetilde{y}_m|+|\widetilde{y}_{m+1}|\,.$$

Тогда

$$\tau_2(x;A_x)\prec\left(1+|x|\right)^{-l}\int\limits_0^\infty\left|\widetilde{y}_{m+1}\right|^{2\nu_2-1}d\widetilde{y}_{m+1}\int\limits_0^\infty\left|\widetilde{y}_m\right|^{2\nu_1-1}d\widetilde{y}_m\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty dy_{m+1}\int\limits_0^\infty\left(\min\left\{|y_m|+|\widetilde{y}_m|,\ |y_{m+1}|+|\widetilde{y}_{m+1}|\right\}\right)^{\gamma-\alpha}dy_m\times$$

$$\times\int\limits_{R_{m-1}}\left(|z|+\min\{x_m,x_{m+1}\}+|x_m-y_m|+|x_{m+1}-y_{m+1}|+|\widetilde{y}_m|+|\widetilde{y}_{m+1}|\right)^{-m-1-2\nu}dz\ ,$$

где $|z|=|x'-y'|$.

Откуда

$$\tau_2(x;A_x)\prec\left(\min\{x_m,x_{m+1}\}\right)^{\gamma-\alpha}\cdot\left(1+|x|\right)^{-l}\,. \tag{9}$$

Оценим сверху $\tau_2(x;B_x)$.

Пусть $|x| \ge 1$. Тогда $|\tilde{x} - y| \asymp |y| + |x|$. Положим $\mu = (\gamma + \beta) + (1 + \gamma - \alpha)$. В силу (5) $\mu > 0$. С учетом этого получаем:

$$\tau_2(x; B_x) \prec \int_0^\infty |\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2 - 1} d\tilde{y}_{m+1} \times \int_0^\infty |\tilde{y}_m|^{2\nu_2 - 1} d\tilde{y}_m \times \int_0^\infty dy_{m+1} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left(\min\{|y_m| + |\tilde{y}_m|, |y_{m+1}| + |\tilde{y}_{m+1}|\}\right)^{\gamma - \alpha} dy_m \times \int_{R_{m-1}} (|y'| + |x| +$$

$$+ |y_m| + |y_{m+1}| + |\tilde{y}_m| + |\tilde{y}_{m+1}|)^{-(m + \mu + 2\nu)} dy'.$$

Откуда $\tau_2(x; B_x) \prec (\min\{x_m, x_{m+1}\})^{\gamma - \alpha} \cdot (1 + |x|)^{-l}, \quad (|x| \ge 1)$.

Пусть $|x| < 1$ и $y \in B_x$. Тогда при $|y| \ge 1$ $|y| \asymp |y| + |x| + 1$, а также при $|y| < 1$ $(1 + |y|) \asymp 1$ и $|\tilde{x} - y| \asymp |y| + |x|$.

Поэтому

$$\tau_2(x; B_x) \prec \int_{\{y \in R_{m+3}: |y| < 1\}} \frac{|\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2 - 1} |\tilde{y}_m|^{2\nu_1 - 1} \left(\min\{|y_m| + |\tilde{y}_m|, |y_{m+1}| + |\tilde{y}_{m+1}|\}\right)^{\gamma - \alpha} dy}{\left(|y'| + \min\{x_m, x_{m+1}\} + |y_m| + |y_{m+1}| + |\tilde{y}_m| + |\tilde{y}_{m+1}|\right)^{m + 1 + 2\nu}} +$$

$$+ \int_{\{y \in R_{m+3}: |y| \ge 1\}} \frac{|\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2 - 1} |\tilde{y}_m|^{2\nu_1 - 1} \left(\min\{|y_m| + |\tilde{y}_m|, |y_{m+1}| + |\tilde{y}_{m+1}|\}\right)^{\gamma - \alpha} dy}{(|y| + 1 + |x|)^{m + 1 + 2\nu + l}} \prec$$

$$\prec (\min\{x_m, x_{m+1}\})^{\gamma - \alpha} (1 + |x|)^{-l}.$$

Итак, мы доказали, что

$$\tau_2(x; B_x) \prec (\min\{x_m, x_{m+1}\})^{\gamma - \alpha} (1 + |x|)^{-l} \qquad (10)$$

Аналогично доказывается

$$\tau_2(x; C_x) \prec (\min\{x_m, x_{m+1}\})^{\gamma - \alpha} (1 + |x|)^{-l}.$$

Таким образом, нами доказано

$$|\tau_2(x, B)| \prec \|u\|_{H^\gamma_{\alpha\beta}} \cdot \|f\| \cdot (\min\{x_m, x_{m+1}\})^{\gamma - \alpha} (1 + |x|)^{-l}. \qquad (11)$$

Тогда

$$|A u(x)| \le C_1 \cdot \|u\|_{H^\gamma_{\alpha\beta}} \cdot (\min\{x_m, x_{m+1}\})^{\gamma - \alpha} (1 + |x|)^{-l},$$

где C_1 не зависит от f.

А теперь докажем 2).

Положим

$$\omega_1'(x) = \omega_x'(\tilde{x}, 2|h|), \quad \omega_2'(x) = \omega_x'(x \tilde{+} h, 3|h|), \quad \omega_3'(x) = \omega_x'\left(x \tilde{+} h, \frac{\min\{x_m, x_{m+1}\}}{2} - |h|\right).$$

Очевидно, что $\omega_1' \subset \omega_2' \subset \omega_3' \subset \omega_x'$.

Имеет место представление

$$A\,u(x)-A\,u(x\tilde{+}h)=\sum_{i=1}^{5}R_i\ , \tag{12}$$

где

$$R_1=\left(\int\limits_{ш_2'}+\int\limits_{ш_x'\backslash ш_3'}\right)K(y,\tilde{x})(u_1(y)-u(x))\cdot|\tilde{y}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2-1}dy;$$

$$R_2=-\int\limits_{ш_2'}K(y,x\tilde{+}h)(u_1(y)-u(x\tilde{+}h))\cdot|\tilde{y}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2-1}dy;$$

$$R_3=-\int\limits_{ш_x'\backslash ш_3'}K(y,x\tilde{+}h)u_1(y)\cdot|\tilde{y}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2-1}dy;$$

$$R_4=\int\limits_{ш_3'\backslash ш_2'}(K(y,\tilde{x})-K(y,x\tilde{+}h))(u_1(y)-u(x))\cdot|\tilde{y}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2-1}dy;$$

$$R_5=\int\limits_{R_{m+3}\backslash ш'_x}(K(y,\tilde{x})-K(y,x\tilde{+}h))u_1(y)\cdot|\tilde{y}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2-1}dy,$$

где

$$K(y,\tilde{x})=f(\theta)/r_{\tilde{x},y}^{m+1+2\nu}\ ,\quad u_1(y)=u\left(y',\sqrt{y_m^2+\tilde{y}_m^2},\sqrt{y_{m+1}^2+\tilde{y}_{m+1}^2}\right).$$

Простыми вычислениями доказывается, что при

$$x\in R_{m+1,2}^{+},\ y\in R_{m+3}\setminus ш_x'\ \text{ и }\ |h|\le\frac{\min\{x_m,x_{m+1}\}}{8}\qquad r_{\tilde{x},y}=r_{x\tilde{+}h,y}, \tag{13}$$

$$|K(y,\tilde{x})-K(y,x\tilde{+}h)|\prec(c_f+\|f\|)\cdot|h|^{\delta}\cdot r_{\tilde{x},y}^{-(m+1+2\nu+\delta)}. \tag{14}$$

А теперь оценим сверху $|R_i|$, $(i=1,5)$.

Учитывая пункт б) следствия Н, а также (13), получаем

$$|R_1|\prec c_f\cdot\rho^{-1}(x)\cdot(1+|x|)^{-2\gamma}\cdot\|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}}\left(\int\limits_{ш_2'}+\int\limits_{ш_x'\backslash ш_3'}\right)\frac{|\tilde{y}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2-1}dy}{|(x\tilde{+}h)-y|^{m+1+2\nu-\gamma}}\prec$$

$$\prec C_f\cdot\rho^{-1}(x)\cdot(1+|x|)^{-2\gamma}\cdot\|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}}\cdot|h|^{\gamma}.$$

Аналогично доказывается, что $|R_2|\prec C_f\cdot\rho^{-1}(x)\cdot(1+|x|)^{-2\gamma}\cdot\|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}}\cdot|h|^{\gamma}$.

Оценим $|R_3|$:

$$|R_3|\prec c_f\cdot\|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}}\int\limits_{ш_x'\backslash ш_3'}\frac{|\tilde{y}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2-1}(\min\{|y_m|+|\tilde{y}_m|,|\tilde{y}_{m+1}|+|\tilde{y}_{m+1}|\})^{\gamma-\alpha}dy}{|(x\tilde{+}h)-y|^{m+1+2\nu}\cdot(1+|y|)^{l}}\prec$$

$$\prec(\min\{x_m,x_{m+1}\})^{\gamma}\cdot\|f\|\cdot\|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}}\cdot\rho^{-1}(x)\cdot(1+|x|)^{-2\gamma}\cdot\int\limits_{A\backslash ш_3'}\frac{|\tilde{y}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2-1}dy}{r_{x\tilde{+}h,y}^{m+1+2\nu}},$$

где

$$A=\left\{y\in R_{m+3}:\left|x\widetilde{+}h-y\right|<\frac{\min\{x_m,x_{m+1}\}}{2}+|h|\right\}\supset ш'_x,$$

откуда следует, что

$$|R_3|\prec\|f\|\cdot\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\,\rho^{-1}(x)\cdot(1+|x|)^{-2\gamma}\cdot|h|^{\gamma}.$$

Оценим сверху $|R_4|$. Учитывая (13) и (14) получаем:

$$|R_4|\prec(c_f+\|f\|)\cdot\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}(1+|x|)^{-2\gamma}\cdot\rho^{-1}(x)\cdot|h|^{\delta}\times$$

$$\times\int\limits_{ш'_3\backslash ш'_2}\frac{|\widetilde{y}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\widetilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2-1}\,dy}{\left|(x\widetilde{+}h)-y\right|^{m+1+2\nu+\delta-\gamma}}\prec$$

$$\prec(c_f+\|f\|)\cdot\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot(1+|x|)^{-2\gamma}\rho^{-1}(x)\cdot|h|^{\gamma}.$$

Теперь оценим сверху $|R_5|$. С учетом (13) и (14) получаем

$$|R_5|\prec(c_f+\|f\|)\cdot\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot|h|^{\delta}\times$$

$$\times\int\limits_{R_{m+3}\backslash ш'_x}\frac{|\widetilde{y}_m|^{2\nu_1-1}\cdot|\widetilde{y}_{m+1}|^{2\nu_2-1}\left(\min\{|y_m|+|\widetilde{y}_m|,|y_{m+1}|+|\widetilde{y}_{m+1}|\}\right)^{\gamma-\alpha}dy}{r^{m+1+2\nu+\delta}_{\widetilde{x},y}(1+|y|)^{l}}\prec$$

$$\prec(c_f+\|f\|)\cdot|h|^{\delta}.\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot(\min\{x_m,x_{m+1}\})^{-\delta}\cdot(\min\{x_m,x_{m+1}\})^{\gamma-\alpha}\cdot(1+|x|)^{-l}\prec$$

$$\prec(c_f+\|f\|)\cdot\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot\rho^{-1}(x)\cdot(1+|x|)^{-2\gamma}|h|^{\gamma}.$$

Итак, мы получим, что

$$|Au(x)-Au(x\widetilde{+}h)|\le c_2\cdot\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\,\rho^{-1}(x)\cdot(1+|x|)^{-2\gamma}|h|^{\gamma}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ключанцев М.И. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига, I, //Сибирский матем.журн., 1970, т.XI, № 4, -с.810-821.
2. Кипрянов Н.А., Ключанцев М.И. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига, II, //Сибирский матем.журн., 1970, т.XI, № 5, -с.1061-1083.
3. Абдуллаев С.К. Многомерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Гельдера с весом, вырождающимся на некомпактном множестве, //ДАН СССР.-1989, т.308, № 6, -с.1289-1292.
4. Абдуллаев С.К. Многомерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Гельдера с весом. //Ин-т физики АН Азерб.ССР-Препр.-1988, № 8, -50 с.
5. Abdullayev S.K., Agarzayev B.K. Transactions issue math., and mech.series of physical – technical and mathematical science, XXIV, № 1, Baku-2004, “Elm”.
6. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. // Успехи матем. наук, 6, № 2 (1951), стр.102-143.

ÜMUMİLƏŞMİŞ SÜRÜŞMƏ OPERATORUNUN DOĞURDUĞU SİNQULYAR İNTEQRALLAR ÜÇÜN ÇƏKİLİ HÖLDER QİYMƏTLƏNDİRMƏLƏRİ

S.K.ABDULLAYEV, A.A.ƏKBƏROV

XÜLASƏ

Ümumiləşmiş sürüşmə operatorunun doğurduğu çoxölçülü sinqulyar inteqralların sistematik araşdırılması N.A.Kipriyanov və M.İ.Kluçantsevin işlərindən başlamış və xüsusi halda onlar üçün Privalov tipli teoremlər isbat olunmuşdur. İşdə bu inteqralların $H^{\gamma}_{\alpha\beta}$ çəkili Hölder fəzalarında məhdudluğu üçün α, β, γ üzərinə qoyulan kafi şərt tapılmışdır. Qeyd edək ki, işdə ümumiləşmiş sürüşmə operatoru iki dəyişənə nəzərən götürüldüyü hala baxılır.

WEIGHTED HOLDER'S ESTIMATES FOR SINGULAR INTEGRALS GENERATED BY GENERALIZED SHIFT OPERATOR

S.K.ABDULLAYEV, A.A.AKPEROV

SUMMARY

Systematic investigations of the multi-dimentional singular integrals which generated by generalize shift operator began from the works by N.A.Kipriyanov and M.I.Clychasev, where particularly are proved theorems of the type of Privalov's theorems. In this work these integrals are studied in weighted spaces of the Holder $H^{\gamma}_{\alpha\beta}$. The sufficient conditions on α, β and γ supporting their invariants are founded. Note that in this work also is considered the case, where the operator of generalized shift takes on two variables.